E.N.S.E.T. section A3 session 1987 DURÉE : 4 heures

L'objet du problème est la recherche des solutions, sur un intervalle I donné de $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $E_{\alpha,\beta}$:

$$x^2y'' - (\alpha + \beta - 1)\,xy' + \alpha\beta y = f(x),$$

α et β étant 2 réels donnés, la fonction f étant supposée continue sur l'intervalle I.

On rappelle que la fonction $y : x \longmapsto y(x)$ est dite solution dans I de $E_{\alpha,\beta}$ si cette fonction est deux fois continûment dérivable dans I et si :

$$\forall\, x \in I \quad x^2y''(x) - (\alpha + \beta - 1)\,xy'(x) + \alpha\beta y(x) = f(x).$$

On désignera par $E'_{\alpha,\beta}$ l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$x^2y'' - (\alpha + \beta - 1)\,xy' + \alpha\beta y = 0.$$

PARTIE I

1° *a.* Résoudre $E'_{\alpha,\beta}$ dans l'intervalle $I =]0, +\infty[$ en utilisant le changement de variable : $x = e^t$.

b. Résoudre de même $E'_{\alpha,\beta}$ dans l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

c. L'équation $E'_{\alpha,\beta}$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$, autres que la fonction nulle ? (On discutera suivant les valeurs des réels α et β supposés distincts ou non.) (On ne demande pas de résoudre l'équation $E'_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{R}$).

2° *a.* Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation :

(1) $$x^2y'' + 4\,xy' + 2\,y = 0,$$

b. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation :

(2) $$x^2y'' + 4\,xy' + 2\,y = A \sin x + B \cos x$$

(où A et B sont des constantes réelles données) à l'aide du changement de fonction inconnue défini par $y = \dfrac{u}{x^2}$.

Retrouver, en particulier, les solutions de (1).

c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (2).

PARTIE II

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [0, a[$, où a est un réel strictement positif donné. On suppose également que α et β sont des réels donnés *distincts* avec $\alpha < 0$ et $\beta < 0$. À cette fonction f, on associe la fonction F définie sur $I = [0, a[$ par :

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\,F(x) = x^\alpha \displaystyle\int_0^x f(t)\,t^{-1-\alpha}\,dt - x^\beta \int_0^x f(t)\,t^{-1-\beta}\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \dfrac{f(0)}{\alpha\beta}. \end{cases}$$

1° *a.* Soit f définie par : $\forall\, t \in [0, 1[\quad f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

Calculer $F(x)$ sur $]0, 1[$ pour $\alpha = -1$ et $\beta = -2$.

b. La fonction F est-elle continue sur $[0, 1[$ dans ce cas particulier?

2° On revient aux hypothèses générales précisées plus haut.

a. Montrer que F est bien définie sur $]0, a[$ et qu'elle est continue sur cet intervalle. (On précisera soigneusement les théorèmes utilisés.)

b. Montrer que F est deux fois continûment dérivable dans $]0, a[$ et qu'elle est solution dans cet intervalle d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on formera.

Tournez la page S. V. P.

c. On fait l'hypothèse supplémentaire que f admet une dérivée f' continue sur $[0, a[$. Montrer que F est continue à droite au point 0.

3° On suppose, à présent, que f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $I =]-a, +a[$ et que la fonction F est définie sur cet intervalle I par :

$$\begin{cases} (\alpha - \beta) F(x) = |x|^{\alpha} \int_0^x f(t) |t|^{-\alpha} \frac{dt}{t} - |x|^{\beta} \int_0^x f(t) |t|^{-\beta} \frac{dt}{t} & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \frac{f(0)}{\alpha \beta}. \end{cases}$$

Montrer que F est indéfiniment dérivable dans $I =]-a, +a[$ et que F est solution dans cet intervalle de l'équation différentielle trouvée dans la question II. 2° *b.*

PARTIE III

On suppose dans cette partie que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$: $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$.

α et β sont toujours supposés distincts et négatifs.

1° Montrer que la série entière $\sum_0^{\infty} \frac{a_n x^n}{(n - \alpha)(n - \beta)}$

a le même rayon de convergence R.

(Avant de considérer le cas général, on pourra commencer par considérer le cas où la limite de $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe lorsque n tend vers l'infini.)

2° *a.* Montrer que la fonction somme de la série $\sum_0^{\infty} \frac{a_n x^n}{(n - \alpha)(n - \beta)}$

est solution sur $I =]-R, +R[$ d'une équation différentielle que l'on formera.

b. Déterminer toutes les solutions de

$$x^2 y'' - (\alpha + \beta - 1) x y' + \alpha \beta y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

dans l'intervalle $I =]-R, +R[$.

c. Vérifier le résultat trouvé sur l'équation (2) de la question I.2° *b.* en prenant successivement $(A = 1, B = 0)$ et $(A = 0, B = 1)$.

3° En utilisant les résultats de la question II. 1° déterminer la fonction somme de la série entière :

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \ldots (2n - 1)}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{x^{2n}}{(2n + 1)(2n + 2)}.$$

4° *a.* Quelle est la fonction somme de la série entière : $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)!}$?

b. Déterminer la fonction somme de la série entière : $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)! \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right)}$.

• • •